

Analysis III

ÜBUNGSBLATT 4

1. Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen einer Menge X , so ist ihr *Limes superior* bzgl der partiellen Ordnung von $\mathcal{P}(X)$ durch Inklusion gegeben durch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} A_k \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

und ihr *Limes inferior* durch

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} A_k \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Zeigen Sie:

- (i) Es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X \mid x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X \mid x \in A_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

- (ii) Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen in $\mathcal{A}$, so gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{A}$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{A}$.

2. (i) Es sei $\mathcal{A}$ eine unendliche σ -Algebra auf einer Menge X . Dann existiert eine abzählbar unendliche Partition von X in nichtleere Teilmengen aus $\mathcal{A}$.
(ii) Jede σ -Algebra enthält entweder endlich oder überabzählbar viele Teilmengen.
(iii) Ist $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine strikt wachsende Folge von σ -Algebren auf einer Menge X , so ist ihre Vereinigung zwar eine Algebra auf X , jedoch i.a. keine σ -Algebra.
(iv)* Sie ist nie eine σ -Algebra.

3. Jede der folgenden Familien erzeugt die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}^d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ auf $\mathbb{R}^d$:

- (i) alle abgeschlossenen metrischen Bälle
(ii) die offenen metrischen Bälle $B_{1/n}(x)$ für $x \in \mathbb{Q}^d$ und $n \in \mathbb{N}$
(iii) alle abgeschlossenen achsenparallelen Quader
(iv) die Orthanten $\{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i > a_i \forall i\}$ für $a \in \mathbb{R}^d$

4. *Messbare Struktur auf $\overline{\mathbb{R}}$.* Die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ lässt sich in natürlicher Weise von $\mathbb{R}$ auf $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ ausdehnen. Dies basiert auf der Ausdehnung der *Anordnung* durch die Ungleichungen $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sowohl die Standardtopologie als auch die Borelsche σ -Algebra auf $\mathbb{R}$ werden von der Familie der unbeschränkten offenen Intervalle $(-\infty, a)$ und (a, ∞) für $a \in \mathbb{R}$ erzeugt. Entsprechend kann man die *Standardtopologie* auf $\overline{\mathbb{R}}$ und die zugehörige *Borelsche σ -Algebra* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ als die von der Familie der Intervalle $[-\infty, a)$ und $(a, \infty]$ für $a \in \mathbb{R}$ erzeugte Topologie bzw σ -Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ definieren. (Im Fall der σ -Algebra genügen schon die Intervalle $[-\infty, a)$ für $a \in \mathbb{R}$ oder die Intervalle $(a, \infty]$ für $a \in \mathbb{R}$.)

Zeigen Sie:

- (i) Für $M \subset \overline{\mathbb{R}}$ gilt: $M \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \Leftrightarrow M \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- (ii) Die monotone Bijektion $\tau : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die den Tangens fortsetzt, ist (bzgl der natürlichen topologischen bzw messbaren Zusatzstrukturen) ein *Homöomorphismus* sowie ein *Isomorphismus von Messräumen*, dh für $M \subset \overline{\mathbb{R}}$ gilt $M \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ genau dann, wenn $\tau^{-1}(M) \in \mathcal{B}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$.

Wenn Sie Ihre Übungen bis Freitag dem 17.11.2023 um 16:00 Uhr in Moodle einreichen, versuchen wir Ihnen zu möglichst vielen Ihrer Abgaben eine Rückmeldung zu geben. Bitte benennen Sie die Datei als B4_Name1.Name2, wenn Sie z.B. zu zweit abgeben, wobei Name1 der Nachname der einreichenden Person sein sollte.

1. Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen einer Menge X , so ist ihr *Limes superior* bzgl. der partiellen Ordnung von $\mathcal{P}(X)$ durch Inklusion gegeben durch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} A_k \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

und ihr *Limes inferior* durch

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} A_k \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Zeigen Sie:

- (i) Es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X \mid x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X \mid x \in A_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

(i) Es gilt für $x \in X$:

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists k \geq n: x \in A_k \Leftrightarrow x \text{ liegt in unendl. vielen } A_n$$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \forall k \geq n: x \in A_k \Leftrightarrow x \text{ liegt in fast allen } A_n$$

(ii) Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen in $\mathcal{A}$, so gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{A}$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(ii) Da für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ auch der Schnitt $\bigcap A_n = \left(\bigcup A_n^c \right)^c$ in $\mathcal{A}$ liegt, folgt

(ii) sofort aus (i)

2. (i) Es sei $\mathcal{A}$ eine unendliche σ -Algebra auf einer Menge X . Dann existiert eine abzählbar unendliche Partition von X in nichtleere Teilmengen aus $\mathcal{A}$.
- (ii) Jede σ -Algebra enthält entweder endlich oder überabzählbar viele Teilmengen.
- (iii) Ist $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine strikt wachsende Folge von σ -Algebren auf einer Menge X , so ist ihre Vereinigung zwar eine Algebra auf X , jedoch i.a. keine σ -Algebra.
- (iv)* Sie ist nie eine σ -Algebra.

(i) Es sei $\mathcal{A}$ eine unendliche σ -Alg auf einer Menge X . Dann existiert eine abz. Partition von X durch nichtleere Teilmengen aus $\mathcal{A}$. Wir konstruieren induktiv eine strikt absteigende Folge $(A_n)_n$ in $\mathcal{A}$. Dann ist $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n+1}) \cup A \cup (X \setminus A)$ mit $\mathcal{P}(A_n) \cap \mathcal{A}$ unendlich $\forall n \in \mathbb{N}$. Davon sind abz. viele nichtleer und wir erhalten somit die gewünschte Partition. Sei $A_1 = X$. Angenommen $A_1 \supset \dots \supset A_n$ sind bereits konstruiert $\mathcal{P}(A_i) \cap \mathcal{A}$ unendl für $i=1, \dots, n$. Sei $\emptyset \neq B \in A_n$. Setze $A_{n+1} = B$ oder als $A_{n+1} = A_n \setminus B$ sodass $\mathcal{P}(A_{n+1}) \cap \mathcal{A}$ unendlich ist.

(Existiert, da $(\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{A}) \times (\mathcal{P}(A_n \setminus B) \cap \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{P}(A_n) \cap \mathcal{A}$ eine Bijektion ist.
 $(B_1, B_2) \mapsto B_1 \cup B_2$

(ii) Jede σ -Alg enthält nur endlich viele Mengen oder überabz. viele.

Sei $\mathcal{A}$ eine unendl σ -Alg auf X . Nach (i) existiert eine Partition $X = \bigcup_n A_n$ mit $A_n \in \mathcal{A}$. Dann ist $M := \{\bigcup_{i \in I} A_i : I \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ und $|M| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$

(iii) z.B. $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \sigma(\{1, \dots, n\}) = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) \cup \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})^c$

Dann ist $\bigcup_n \mathcal{A}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| < \infty \vee |\mathbb{N} \setminus A| < \infty\}$ und $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} \in \sigma(\bigcup_n \mathcal{A}_n) \setminus \bigcup_n \mathcal{A}_n$

(iv) Konstruiere induktiv eine streng wachsende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von natürl. Zahlen und eine strikt abst. Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A_k \in \mathcal{A}_{n_k} \setminus \mathcal{A}_{n_{k-1}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. ($\mathcal{A} = \emptyset$, keine σ -Alg.)

Weiter, s.d. $\mathcal{A}_{n_{k-1}}|_{A_k} \neq \mathcal{A}_n|_{A_k}$ für unendlich viele $n \forall k \in \mathbb{N}$.

Setze $n_1 = 1$, $A_1 = X$. Seien $n_1 < \dots < n_k$ sowie $A_1 \supset \dots \supset A_k$ mit diesen Eig. konstruiert.

Insbesondere gilt dann $\mathcal{A}_{n_{k-1}}|_{A_k} \subseteq \mathcal{A}_n|_{A_k}$ für unendl. viele n . Sei $n_{k+1} > n_k$ so ein n und $B \in \mathcal{A}_{n_{k+1}} \setminus \mathcal{A}_{n_k}|_{A_k}$.

Dann ist $B \neq \emptyset \in \mathcal{A}_k$ und für $A_{k+1} = B$ oder $A_{k+1} = A_k \setminus B$ gilt $\mathcal{A}_{n_{k-1}}|_{A_{k+1}} \neq \mathcal{A}_n|_{A_{k+1}}$ für unendl. viele n . (*)

Zu (*): Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufst. Folge von σ -Alg auf einer Menge Y mit $B_n \neq B_{n+1}$ für ∞ -viele n , $B \in B_1$.

Dann gilt $B_n|_B \neq B_{n+1}|_B$ oder $B_n|_{Y \setminus B} \neq B_{n+1}|_{Y \setminus B}$ für ∞ -viele n .

Dafür genügt es zz. $B_n \neq B_{n+1} \Rightarrow$

Ang. es gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ nicht. Dann ist $A = \underbrace{(A \cap B)}_{\in B_n} \cup \underbrace{(A \cap (X \setminus B))}_{\in B_n} \in B_n \quad \forall A \in B_n \quad \text{?}$

Nach Übergang zu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ können wir annehmen, dass $A_n \in A_{n-1} \setminus A_{n-2} \quad \forall n$ (möglich, da $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$)

Sei $\emptyset \neq C_n := A_n \setminus A_{n-1} \in A_{n-1} \setminus A_{n-2}$ (Andernfalls wäre $A_{n-1} = A_n \setminus (A_n \setminus A_{n-1}) \in A_{n-2}$)

Ang. $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ist eine σ -Alg. Betrachte $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ mit $I_n \subseteq I$ abs. unendl.

Setze $U_n = \bigcup_{i \in I_n} C_i$, dann ex. eine str. wachst. Folge $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $U_n \in A_{i_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Sei $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $j_n > i_n$ und $j_n \in I_n$, sowie $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_{j_n} \in A_{i_n}$ für n hinr. groß.

Dann ist $U \cap U_n = C_{j_n} \notin A_{i_n} \quad \text{?}$ $j_n > i_n$, also $C_{j_n} \notin A_{i_n}$

3. Jede der folgenden Familien erzeugt die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}^d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ auf $\mathbb{R}^d$:

- (i) alle abgeschlossenen metrischen Bälle
- (ii) die offenen metrischen Bälle $B_{1/n}(x)$ für $x \in \mathbb{Q}^d$ und $n \in \mathbb{N}$
- (iii) alle abgeschlossenen achsenparallelen Quader
- (iv) die Orthanten $\{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i > a_i \forall i\}$ für $a \in \mathbb{R}^d$

Lemma Sei (X, d) ein metr. Raum, $A \subseteq X$ eine dichte Teilm. Dann bilden die Mengen der Form $B_{\frac{1}{n}}(a)$ $n \in \mathbb{N}$, $a \in A$ eine Basis der Topologie

Beweis Sei $U \subseteq X$ eine off. Teilmenge. Dann ex. zu $x \in U$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq U$.

Da A dicht in X ist, ex. ein $a \in B_{\frac{1}{n}}(x)$. Dann ist $x \in B_{\frac{1}{n}}(a) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq U$.

Folglich ex. $I \subseteq \mathbb{N} \times A$, s.d. $U = \bigcup_{n \in I} B_{\frac{1}{n}}(a)$, d.h. diese Mengen $B_{\frac{1}{n}}(a)$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in A$ bilden eine Basis.

Ist nun A abs., so auch $\mathbb{N} \times A$ und jede off. Menge ist Vereinig. abs. vieler Mengen $B_{\frac{1}{n}}(a)$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in A$.

Für $A = \mathbb{Q}^d$ und $X = \mathbb{R}^d$ folgt: $\mathcal{E}_1$ eine abs. Basis der Standardtop. und $\sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}^d = \text{trivial}$

Da $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 := \{B_r(x) : r > 0, x \in \mathbb{R}^d\}$, folgt $\sigma(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}^d$

(i) $\mathcal{E}_1^c \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_1^c) \subseteq \mathcal{B}^d$. Sei $r > 0, x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt für $n \geq \frac{1}{r}$ $B_r(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{n}}(x)$

Damit gilt $\sigma(\mathcal{E}_1) \supseteq \sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}^d$

(ii) ✓

(iii) $\mathcal{E}_3^c \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_3) = \sigma(\mathcal{E}_3^c) \subseteq \mathcal{B}^d$. Sei $a \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $\{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i > a_i\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{i=1}^d [a_i - \frac{1}{n}, a_i + \frac{1}{n}]$
also $\sigma(\mathcal{E}_4) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$. Es genügt z.z. $\sigma(\mathcal{E}_4) = \mathcal{B}^d$.

(iv) Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $\prod_{i=1}^d (-x_i + x_i, x_i + x_i) = \{z \in \mathbb{R}^d : z_i > x_i - x_i, z_i < x_i + x_i\} \cap A_i^n \cap \dots \cap A_i^n$.

$A_i = \{z \in \mathbb{R}^d : z_i > x_i + x_i, -x_i > x_i - x_i \text{ für } j \neq i\}$, also enthält $\sigma(\mathcal{E}_4)$ alle halboffenen achsenparallelen Quader (der Form $^c(,]^n$).

$B_r^{\text{do}}(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{i=1}^d (-x_i + x_i, x_i + x_i - \frac{1}{n})$. Mit dem Lemma (oder allg. da $\mathbb{R}^d$ zweitabz.) und, da $\mathcal{E}_4$ die Standardtop erzeugt, folgt, dass $\sigma(\{B_r^{\text{do}}(x) : r > 0, x \in \mathbb{R}^d\}) = \mathcal{B}^d$

Somit ist $\mathcal{B}^d \subseteq \sigma(\mathcal{E}_4)$.

4. *Messbare Struktur auf $\overline{\mathbb{R}}$.* Die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ lässt sich in natürlicher Weise von $\mathbb{R}$ auf $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ ausdehnen. Dies basiert auf der Ausdehnung der Anordnung durch die Ungleichungen $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sowohl die Standardtopologie als auch die Borelsche σ -Algebra auf $\mathbb{R}$ werden von der Familie der unbeschränkten offenen Intervalle $(-\infty, a)$ und (a, ∞) für $a \in \mathbb{R}$ erzeugt. Entsprechend kann man die *Standardtopologie* auf $\overline{\mathbb{R}}$ und die zugehörige *Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$* als die von der Familie der Intervalle $[-\infty, a)$ und $(a, \infty]$ für $a \in \mathbb{R}$ erzeugte Topologie bzw σ -Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ definieren. (Im Fall der σ -Algebra genügen schon die Intervalle $[-\infty, a)$ für $a \in \mathbb{R}$ oder die Intervalle $(a, \infty]$ für $a \in \mathbb{R}$.)

Zeigen Sie:

(i) Für $M \subset \overline{\mathbb{R}}$ gilt: $M \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \Leftrightarrow M \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(ii) Die monotone Bijektion $\tau : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die den Tangens fortsetzt, ist (bzgl der natürlichen topologischen bzw messbaren Zusatzstrukturen) ein *Homöomorphismus* sowie ein *Isomorphismus von Messräumen*, dh für $M \subset \overline{\mathbb{R}}$ gilt $M \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ genau dann, wenn $\tau^{-1}(M) \in \mathcal{B}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$.

z.z.: Für $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ gilt: $M \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \Leftrightarrow M \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Allgemein: Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ σ -Algebra auf X , sowie $\mathcal{A} \ni Y \subseteq X$.

Sei $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Dann ist $\sigma_Y(\mathcal{A}_Y) = \mathcal{A}_Y$:

" $\leq$ " Da $\mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_Y$ σ -Alg, auf Y ist $\sigma_Y(\mathcal{A}_Y) \subseteq \mathcal{A}_Y$

" $\geq$ " Betrachte $\mathcal{A}' := \{A \subseteq X : A \cap Y \in \sigma_Y(\mathcal{A}_Y)\}$. Dann ist $\emptyset \in \mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}'$ eine σ -Alg

($\emptyset \in \mathcal{A}'$, sowie σ -u-stabil klar. Ist $A \in \mathcal{A}'$, so ist $A \cap Y = Y \cap (Y \cap A) \Rightarrow A \in \mathcal{A}'$, also $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
Es folgt $\mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A}'_Y \subseteq \sigma_Y(\mathcal{A}_Y) \subseteq \mathcal{A}_Y$, also $\sigma_Y(\mathcal{A}_Y) = \mathcal{A}_Y$.

Weiter gilt $\mathcal{A}_Y = \{A \subseteq Y : A \in \mathcal{A}\}$, da $Y \in \mathcal{A}$

Mit $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \bigcap [-\infty, -n) \cup \bigcap (n, \infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ folgt

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma_{\mathbb{R}}(\overline{\mathcal{I}}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}}$, wobei $\overline{\mathcal{I}} = \{[-\infty, a), (a, \infty] : a \in \mathbb{R}\}$

Für $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ folgt: Ist $M \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, so ist $M \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und damit $\frac{M \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}}}{\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ist $M \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, so auch $M \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ und damit $M \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, da $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$